

Problema 11.3

Soluție

Pentru reprezentarea rețelei în forma din *fig. 1*, unde ρ este rezistența rețelei semi-infinite reprezentate în *fig. 2*. **(1.0 p.)**
 Pentru observarea din (*fig. 1*) că rezistența ρ a rețelei semi-infinite satisface relația:

$$r + \frac{R\rho}{R + \rho} = \rho \quad (1) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

Pentru obținerea din (1) a expresiei pentru rezistența rețelei semi-infinite:

$$\rho = \frac{r}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{r}} \right) \quad (2) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

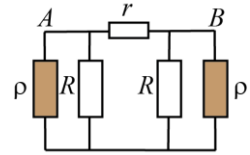


Fig. 1

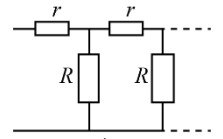


Fig. 2

2.0p.

Pentru determinarea cu ajutorul *fig. 1* și a relației (1) a rezistenței R_1 :

$$R_{AB} = R_1 = \frac{2R\rho r}{2R\rho + Rr + \rho r} = \frac{2Rr}{2R + \rho} \quad (3) \quad \textbf{(1.0 p.)}$$

1.0p.

Pentru observarea faptului că în cazul când nodurile A și B se află la o distanță foarte mare, rețeaua poate fi reprezentată ca în *fig. 3* și, apoi, ca în *fig. 4*. **(1.0 p.)**

Pentru determinarea R_∞ cu ajutorul *fig. 3* și *fig. 4*:

$$R_{AB} = R_\infty = \frac{2\rho R}{2R + \rho} \quad (4) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

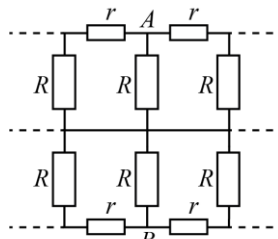


Fig. 3

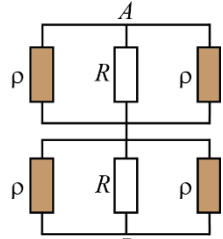


Fig. 4

1.5p.

Pentru ideea de a conecta sursa de curent cu tensiunea electromotoare \mathcal{E} și rezistența interioară neglijabilă la capetele rezistorului R conectat la punctul A (*fig. 5*). **(1.0 p.)**

Pentru reprezentarea rețelei din *fig. 5* în forma din *fig. 6* și determinarea intensității curentului I generat de sursă, a intensității curentului I_1 prin rezistorul R , a intensității curentului I_2 prin rețeaua semi-infinită,

precum și a potențialului φ_A a punctului A , considerând potențialul conductorului OO egal cu zero:

$$I = \frac{2R + \rho}{R\rho} \mathcal{E}, \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\rho}, \quad \varphi_A = \mathcal{E}, \quad \varphi_O = 0 \quad (5) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

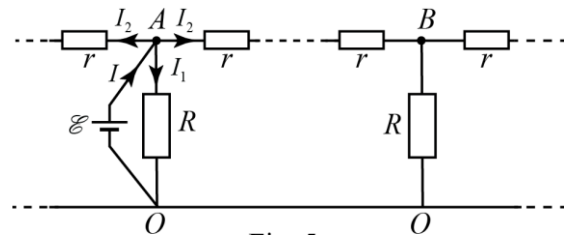


Fig. 5

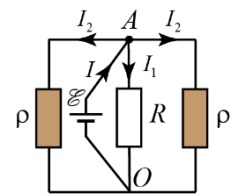


Fig. 6

5.5p.

Pentru determinarea potențialului nodului B (*fig. 7*) când acesta este separat de nodul A printr-un singur rezistor r folosind relațiile (1) și (5):

$$\varphi_B - \varphi_O = \varphi_B = I_2 \frac{\rho R}{R + \rho} = \frac{R}{R + \rho} \mathcal{E} = \mathcal{E} \frac{\rho - r}{\rho} = \varphi_A \left(1 - \frac{r}{\rho} \right) \quad (6) \quad \textbf{(1.0 p.)}$$

Pentru determinarea potențialului nodului B când acesta este separat de nodul A prin două, trei ... n rezistoare r :

$$\varphi_B = \varphi_A \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^2, \quad \varphi_B = \varphi_A \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^3, \quad \dots, \quad \varphi_B = \varphi_A \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n = \mathcal{E} \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n, \quad (7) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

Pentru ideea de a conecta sursa de curent cu polaritatea inversă la capetele rezistorului R conectat la punctul B și obținerea rezultatelor:

$$\varphi'_B = -\mathcal{E}, \quad \varphi'_A = \varphi'_B \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n = -\mathcal{E} \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n \quad (8) \quad \textbf{(1.0 p.)}$$

Pentru determinarea din (5), (7) și (8) a potențialelor nodurilor A și B :

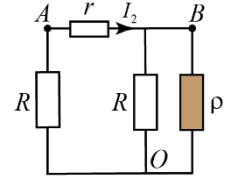


Fig. 7

$$\varphi_A'' = \varphi_A + \varphi_A' = \mathcal{E} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n \right], \quad \varphi_B'' = \varphi_B + \varphi_B' = -\mathcal{E} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n \right] \quad (9) \quad (0.5 \text{ p.})$$

Pentru determinarea rezistenței căutate utilizând legea lui Ohm:

$$R_n = \frac{\varphi_A'' - \varphi_B''}{I} = \frac{2\rho R}{2R + \rho} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n \right] \quad (10) \quad (1.0 \text{ p.})$$

Pentru observarea faptului că pentru $n=1$ din (10) se obține formula (3), iar pentru $n \rightarrow \infty$ se obține formula (4), întrucât $1 - \frac{r}{\rho} < 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^n = 0$.

Total max. 10.0p.